• 영역(A형) •

정 답

1	⑤	2	③	3	④	4	④	5	⑤
6	②	7	①	8	①	9	④	10	①
11	②	12	①	13	④	14	②	15	⑤
16	③	17	②	18	⑤	19	③	20	③
21	①	22	6	23	9	24	52	25	122
26	10	27	6	28	155	29	81	30	65

해 설

1. [출제의도] 지수법칙과 로그의 성질을 이용하여 계산하기

[해설]

$4^{\frac{3}{2}}+\log_3\frac{1}{27}=(2^2)^{\frac{3}{2}}+\log_3 3^{-3}$

$=2^3-3\log_3 3=5$

2. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 계산하기

[해설]

$+B=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&1\\-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\6&-7\end{pmatrix}$

따라서 $(A+B)(A-B)=-(A-B)=\begin{pmatrix}-3&2\\-6&7\end{pmatrix}$

그러므로 모든 성분의 합은 0 이다.

3. [출제의도] 수열의 극한값 계산하기

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\frac{(an-1)(an+1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=a^2$

$a^2=16 \qquad a=4$ ($\because a$는 양수)

4. [출제의도] 등차수열 이해하기

[해설] 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2+a_4+a_6=(a_1+d)+(a_3+d)+(a_5+d)$

$=30+3d=51 \quad \therefore\ d=7$

5. [출제의도] 지수함수의 최대최소 구하기

[해설]

$3^x=t\ \left(\frac{1}{3}\le t\le 9\right)$ 라 하면 $y=t^2-6t$ 이다.

$t=9$ 일 때, y 의 최댓값 27

$t=3$ 일 때, y 의 최솟값 -9

$\therefore\ M+m=18$

6. [출제의도] 역행렬과 연립방정식의 관계를 이해하기

[해설]

$\begin{pmatrix}2k-1&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2k-2&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(2k-2)\times1-2\times2=0 \quad \therefore\ k=3$

7. [출제의도] 실생활에서의 행렬의 곱셈 이해하기

[해설] 오전에 지불해야 할 관람료의 총합은

$0.9\times5\times5000+0.9\times140\times3000$이고,

오후에 지불해야 할 관람료의 총합은

$0.95\times7\times5000+0.95\times160\times3000$이므로,

행렬로 나타내면

$(0.9\ \ 0.95)\begin{pmatrix}5&140\\7&160\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5000\\3000\end{pmatrix}$이다.

8. [출제의도] 등차수열의 합을 구하기

[해설] 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a , 공차를 d라 하면

$S_5=\frac{5(2a+4d)}{2}=10$ 이므로 $2a+4d=4$ 이다. …①

$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=30$ 이므로 $2a+9d=6$ 이다.…②

① 과 ② 에 의해 $a=\frac{6}{5},\ d=\frac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ S_{15}=\frac{15(2a+14d)}{2}=60$

9. [출제의도] 로그를 이용한 실생활 문제 해결하기

[해설] B 의 집진극의 넓이를 S 라 하면, A 의 집진극의 넓이는 $2S$ 이다.

$S=k\log_a\left(1-\frac{80}{100}\right)=k\log_a 0.2$

$2S=k\log_a\left(1-\frac{\eta}{100}\right)$

$2k\log_a 0.2=k\log_a\left(1-\frac{\eta}{100}\right)$

$0.04=1-\frac{\eta}{100}$ 이므로 $\eta=96$이다.

10. [출제의도] 등차수열의 일반항 이해하기

[해설]

$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$ 이므로

$\frac{a_n+a_{n+2}}{6}=\frac{2\times3(n-1)}{6}$

따라서, $\log_5 b_n=\frac{a_n+a_{n+2}}{6}=n-1$

$5^{n-1}<2012$ 인 n 의 최댓값을 구하면 된다.

$5^4<2012$ 이고 $5^5>2012$ 이므로 $n-1=4$

주어진 조건을 만족시키는 n 의 최댓값은 5 이다.

11. [출제의도] 지수와 로그 계산하기

[해설]

$x=\log_a 8,\ y=\log_b 8,\ z=\log_c 8$ 이므로

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\log_8 a-\log_8 b+\log_8 c=\log_8\frac{ac}{b}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \frac{ac}{b}=4$

(별해)

$a=8^{\frac{1}{x}},\ b=8^{\frac{1}{y}},\ c=8^{\frac{1}{z}}$ 이므로 $\frac{ac}{b}=8^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ 이다.

$\frac{ac}{b}=8^{\frac{2}{3}}=4$

12. [출제의도] 행렬의 곱셈과 역행렬의 성질을 이용하기

[해설]

$(2AB)^2=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$ 이므로 $4ABAB=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$

$BABA=\frac{1}{4}A^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}6&1\\-13&-2\end{pmatrix}$

그러므로 모든 성분의 합은 -2 이다.

13. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 이용하여 무한등비급수의 합 구하기

[해설]

$A^1=A$ 이므로 $a_1=1,\ b_1=0$

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\-3&-2\end{pmatrix}$이고

$a_2A+b_2E=\begin{pmatrix}-2a_2+b_2&-a_2\\3a_2&a_2+b_2\end{pmatrix}$이므로

$a_2=-1,\ b_2=-1$

$A^3=E$이므로 $a_3=0,\ b_3=1$

$A^4=A$이므로 $a_4=1,\ b_4=0$

⋮

그러므로 $\{a_nb_n\}$은 $0,1,0,0,1,0,0,1,\cdots$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nb_n}{2^n}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}$

14. [출제의도] 로그함수와 지수함수의 관계 이해하기

[해설]

ㄱ. $(1,1),\ (2,2)$는 $y=f(x),\ y=g(x)$를 모두 만족한다. (참)

ㄴ. ㄱ 에 의해 $1<\alpha<2$ 일 때, $f(\alpha)>g(\alpha)$ 이고 $\alpha<2<\beta$ 일 때, $f(\beta)>g(\beta)$ 이다.

그러므로 $\{f(\alpha)-g(\alpha)\}\{f(\beta)-g(\beta)\}<0$ 이다. (참)

ㄷ. (반례) $x_1=-2,\ x_2=-1$ 일 때

$x_2-x_1>g(x_2)-g(x_1)$ 이다. (거짓)

15. [출제의도] 역행렬의 성질 이해하기

[해설]

$A^2)^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$이므로 $A^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$이다.

$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이므로 $A^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$이다.

$A\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$이 성립하므로

$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$

행렬 A의 모든 성분의 합은 2이다.

16. [출제의도] 수열의 합과 일반항을 이용한 명제 추론하기

[해설] ㉠ 에서 ㉡ 을 뺀 식은

$a_{2m+1}-a_{2m}=-\frac{1}{2m+1}a_{2m}$이므로

$a_{2m+1}=\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)a_{2m}$이고,

$a_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}a_{2m}$ 이다. $\therefore$ $\boxed{(\ \ )}=\frac{2m}{2m+1}$

같은 방법으로 ㉢ 에서 ㉠ 을 뺀 식으로 부터

$a_{2m+2}=\frac{2m+3}{2m+2}a_{2m+1}$ 이다. $\therefore$ $\boxed{(나)}=\frac{2m+3}{2m+2}$

따라서 $f(9)\times g(9)=\frac{18}{19}\times\frac{21}{20}=\frac{189}{190}$ 이다.

17. [출제의도] 도형에서의 무한등비급수 이해하기

[해설] $A_1B=2A_1C_2$ 이다. 또한 직각삼각형 A_1BC_1 과 직각삼각형 A_2BC_2 는 서로 닮음이고, $\overline{A_1C_1}=\alpha$ 라 하면 직각삼각형 A_1BC_1 에서 $\overline{BC_1}=3\alpha$ 이고, 직각삼각형 A_2BC_2 에서 $\overline{BC_2}=\alpha$ 이다.

따라서 두 삼각형의 변에 대한 길이에 대한 비는 $\overline{BC_1}:\overline{BC_2}=\sqrt{3}:1$이다. 그러므로 원 O_1 의 활꼴의 넓이와 원 O_2 의 활꼴의 넓이의 비는 $3:1$이다.

$\triangle ABC:\triangle A_1B_1C_1=\sqrt{3}:1$이므로 원 O_1 의 반지름이 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이고, 현 P_1Q_1 에 대한 중심각은 $\frac{2\pi}{3}$ 이므로 활꼴의 넓이 S_1 은

$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이다.

같은 방법으로 닮음비가 $\sqrt{3}:1$이므로 활꼴의 넓이의 비는 $1:\frac{1}{3}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{8}{3}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$

18. [출제의도] 무한등비급수를 이용한 함수의 그래프 이해하기

[해설]

(ⅰ) $x=0$ 이면 $f(x)=0$ 이다.

(ⅱ) $x\ne0$이면 $f(x)=\frac{x}{1-\frac{1}{1+|x|}}=\frac{x(1+|x|)}{|x|}$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해서

$f(x)=\begin{cases}x-1 & (x<0)\\0 & (x=0)\\x+1 & (x>0)\end{cases}$이다.

$f(x)$ 와 직선 $y=2x+\frac{1}{2}$ 와의 교점의 좌표는

$x=\frac{1}{2},\ x=-\frac{3}{2}$ 이다.

따라서, 모든 교점의 x 좌표의 합은 -1 이다.

19. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 최솟값 구하기

[해설] 행렬 $\begin{pmatrix} y & \\ 2r-y & x-2r \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않으므로 $x(x-2r)-y(2r-y)=0$ 이 된다.

따라서 원 $(x-r)^2+(y-r)^2=2r^2$ 이 부등식의 영역과 만나야하므로 r 의 최솟값은 원이 직선 $y=-x+16$ 에 접할 때이다. 원점에서 직선까지의 거리가 지름이므로 $r=4$ 이다.

20. [출제의도] 행렬의 거듭제곱과 곱셈의 성질 이해하기

[해설]

ㄱ. $A=(E-2A)A=A-2A^2=A(E-2A)$
$=AB=O$ 이다. (참)

ㄴ. ㄱ 에 의해 $A-2A^2=0$ 이므로 $A^2=\frac{1}{2}A$

$2AB=O$ 이므로 $(E-B)B=O$ 이다.

따라서 $B^2=B$ 이다.

$(A+2B)^2=A^2+2A(2B)+4B^2=\frac{1}{2}A+4B$ (거짓)

ㄷ. 수학적 귀납법에 의해

$n=1$ 일 때

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2=\frac{1}{2}A+B$ 이다.

$n=k$ 일 때, 관계식이 성립한다고 하면,

$(A+B)^{k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^k A+B$ 이다.

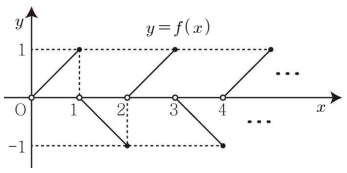
$$\begin{aligned}(A+B)^{k+2}&=(A+B)^{k+1}(A+B)\\&=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k A+B\right\}(A+B)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^k A^2+BA+\left(\frac{1}{2}\right)^k AB+B^2\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}A+B\end{aligned}$$

그러므로 $n=k+1$ 일 때에도 관계식이 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $(A+B)^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n A+B$ 이다. (참)

21. [출제의도] 수열의 규칙성 이해하기

[해설] $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



직선 l_n 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와의 교점을 구해보면 $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=1$, $a_4=2$, $a_5=2$, $a_6=3$, $a_7=3$, $\cdots$ 이므로 구하는 값은

$\sum_{n=1}^{10} a_n=0+1+1+2+2+3+3+4+4+5=25$

22. [출제의도] 그래프의 행렬 구하기

[해설] 행렬의 모든 성분의 합
$=$(모든 변의 개수)$\times 2=8\times 2=16$

23. [출제의도] 로그방정식의 해 구하기

[해설] 주어진 식에서

$\log_2(x-3)^2=\log_2(5x-9)$

$(x-3)^2=5x-9$

$x^2-6x+9=5x-9$

$x^2-11x+18=0$

$(x-2)(x-9)=0$

$x>3$ 이므로 $x=9$ 이다.

24. [출제의도] 지수부등식과 로그부등식의 해 구하기

[해설] $2^{x+1}\ge 2^4$ 에서 $x+1\ge 4$ 이므로 $x\ge 3$ 이다.

$\log_3(x-1)\le 2$ 에서 $x-1\le 3^2$ 에서 $x\le 10$ 이다.

그러므로 구하는 해는 $3\le x\le 10$ 이다.

따라서 모든 정수의 합은 52 이다.

25. [출제의도] 계차수열의 성질 이해하기

[해설] a_n 의 계차수열을 b_n 이라 하면, $b_n=3^n$ 이다.

$a_5=a_1+b_1+b_2+b_3+b_4$ 이므로 $a_5=122$ 이다.

26. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 도형의 넓이 구하기

[해설] 주어진 곡선 $y=4^{x-3}-1$ 는 곡선 $y=4^x$ 을 x 축으로 3 만큼, y 축으로 -1 만큼 평행이동 한 것이다.

선분 PQ 와 RS 를 이은 평행사변형 PRSQ 의 넓이가 구하는 넓이와 같다.

그러므로 구하는 넓이는 $16-\left(\frac{1}{2}\times 3\times 1\right)\times 4=10$ 이다.

(별해)

네 점의 좌표는 P(0, 1), Q(1, 4), S(4, 3), R(3, 0)이다. 따라서 정사각형이 된다.

27. [출제의도] 역행렬을 이용한 연립방정식의 해 구하기

[해설]

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 라 하면,

$AX=2E$ 이고 $A^{-1}=\frac{1}{2}X$ 이다.

주어진 연립방정식은 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 이므로,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}X\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

이다. 따라서 해는 $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ 이고 그 합은 6 이다.

28. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 행렬의 거듭제곱의 규칙성을 찾아 성분의 합 구하기

[해설] $A+E$ 의 역행렬이 $A-E$ 이므로

$(A+E)(A-E)=A^2-E=E$ 이고 $A^2=2E$ 이다.

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$

$=A+2E+2A+4E+\cdots+16A+32E$

$=(A+2A+\cdots+16A)\quad(2E+4E+\cdots+32E)$

$=31A+62E$

모든 성분의 합은 $31+62\times 2=155$ 이다.

29. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 관계를 이용하여 극한값 구하기

[해설] 두 곡선 $y=3^x+2$ 와 $y=\log_3(x-2)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$P_n(n,\ 3^n+2)$, $O(0,\ 0)$, $Q_n(3^n+2,\ n)$

따라서 삼각형 P_nOQ_n 의 넓이

$S_n=\frac{1}{2}\ (3^n+3)^2-n^2)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2S_n+n^2}{9^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}+6\times 3^n+9}{9^{-2}\cdot 3^{2n}}=81$

30. [출제의도] 상용로그 이해하기

[해설] $\log n$ 의 가수를 $\alpha(0\le\alpha<1)$라 하면

$\log n^2=2f(n)+2\alpha$, $\log n^5=5f(n)+5\alpha$이므로

$2f(n)\le f(n^2)\le 2f(n)+1$

$\log n^5=5f(n)+5\alpha$이므로

$5f(n)\le f(n^5)\le 5f(n)+4$

$7f(n)\le f(n^2)+f(n^5)\le 7f(n)+5$

$f(n^2)+f(n^5)=16$이므로 $7f(n)+2=16$

$\therefore f(n)=2$

(ⅰ) $f(n^2)=2f(n)$, $f(n^5)=5f(n)+2$인 경우

$f(n^2)=4$ 이므로 $4\le\log n^2<5$

$\therefore 2\le\log n<2.5$ ⋯⋯ ㉠

$f(n^5)=12$ 이므로 $12\le\log n^5<13$

$\therefore 2.4\le\log n<2.6$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해서 $2.4\le\log n<2.5$

상용로그표에 의해서

$2.4<2+\log 2.52\le\log n\le 2+\log 3.16<2.5$

그러므로 $252\le n\le 316$, n의 개수는 65이다.

(ⅱ) $f(n^2)=2f(n)+1$, $f(n^5)=5f(n)+1$인 경우

$f(n^2)=5$ 이므로 $5\le\log n^2<6$

$\therefore 2.5\le\log n<3$ ⋯⋯ ㉢

$f(n^5)=11$ 이므로 $11\le\log n^5<12$

$\therefore 2.2\le\log n<2.4$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣에 의해서 n 은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 n은 65개다.

• 영역(B형) •

정 답

1	⑤	2	③	3	⑤	4	④	5	②
6	②	7	①	8	①	9	④	10	①
11	④	12	③	13	④	14	⑤	15	⑤
16	③	17	②	18	⑤	19	②	20	③
21	②	22	14	23	12	24	8	25	24
26	10	27	36	28	14	29	100	30	65

해 설

1. [A형과 동일]

2. [A형과 동일]

3. [출제의도] 무리수 e의 값 이해하기

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^2=e^2$

4. [A형과 동일]

5. [출제의도] 삼각함수의 합성을 이해하기

[해설]

$$\begin{aligned}f(x)&=3\sin x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sqrt{3}\sin x+2\cos x\\&=\sqrt{7}\sin(x+\alpha)\end{aligned}$$

단, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$)

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{7}$ 이다.

6. [출제의도] 함수가 연속일 조건을 이용하여 극한값 구하기

[해설] $f(x)$가 $x=1$에서 연속이 되기 위해서는

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3-2}{x-1}=a$ 이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)\ \sqrt{x^2+3}+2)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

7. [A형과 동일]

8. [출제의도] 분수방정식 이해하기

[해설] $f(x)=x(x+4)(x-a)$이므로

$f''(x)=2(3x+4-a)$이다.

방정식 $\frac{f(x)}{f''(x)}=\frac{x(x+4)(x-a)}{2(3x+4-a)}=0$의

무연근은 $x=\frac{a-4}{3}$ 이다.

(ⅰ) $\frac{a-4}{3}=-4$인 경우 : $a=-8$

(ⅱ) $\frac{a-4}{3}=0$인 경우 : $a=4$

(ⅲ) $\frac{a-4}{3}=a$인 경우 : $a=-2$

따라서 $a=4$이다.

(별해)

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 변곡점일 때, 위의 조건을 만족하므로 $a=4$이다.

9. [A형과 동일]

10. [출제의도] 미분계수 구하기

[해설]

$\lim_{\to 0} f(x)+2 = 1$이므로 $f(0) = -2$, $f'(0) = 1$ 이다.

따라서 $g'(0) = 2f(0)f'(0) = -4$이다.

11. [출제의도] 함수의 극한값 구하기

[해설] $\lim_{x \to -0} f(g(x)) = f(-1) = 0$

$\lim_{x \to 1+0} f(g(x)) = \lim_{t \to 1-0} f(t) = -1$

따라서 $\lim_{x \to -0} f(g(x)) + \lim_{x \to 1+0} f(g(x)) = -1$이다.

12. [출제의도] 분수부등식 이해하기

[해설] 분수부등식 $\dfrac{f(x+3)}{f(x-3)} \le 0$의 양변에 $\{f(x-3)\}^2$을 곱하면 $f(x+3)f(x-3) \le 0$이다.

$f(x) = (x-2)(x+2)$에 대하여

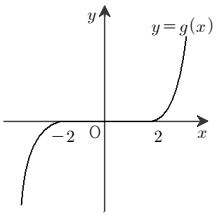
$f(x+3)f(x-3) = (x+1)(x+5)(x-5)(x-1) \le 0$을 만족하는 정수 x는 -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5이고, 1과 5는 무연근이다.

따라서 만족하는 정수 x의 개수는 8개이다.

13. [출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성 이해하기

[해설] $a > 2$이면 $g(x)$는 $x = a$, $x = -a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

$0 < a \le 2$이면 $g(x) = \begin{cases} (x+a)^3 & (x < -a) \\ 0 & (-a \le x < a) \\ (x-a)^3 & (x \ge a) \end{cases}$이다.



따라서 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이고 미분가능하므로 실수 a의 최댓값은 $a = 2$ 이다.

14. [출제의도] 미분을 이용한 함수의 개형 이해하기

[해설] 주어진 식으로부터 $f(x) = x(x-3)^2$ 이다.

$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$, $f''(x) = 6(x-2)$

ㄱ. $f'(1) = 0$, $f''(1) < 0$ 이므로

$x = 1$ 에서 $f(x)$ 는 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ 이므로

$f'(x)$는 $x = 2$ 에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $x = 2$ 에서 $f(x)$ 는 변곡점이므로

$x_1 < 2 < x_2$ 에 대하여 $f''(x_1) < 0$, $f''(x_2) > 0$ 이다. 따라서 $f''(x_1) \times f''(x_2) < 0$ 이다. (참)

15. [출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 삼각방정식의 해 구하기

[해설]

$\mathrm{QH_1} = \sin 2\theta$, $\overline{\mathrm{OH_1}} = \cos 2\theta$, $\mathrm{H_1H_2} = \cos 2\theta \sin\theta$

$\overline{\mathrm{QH_1}} = 3\overline{\mathrm{H_1H_2}}$에 대하여 $\sin 2\theta = 3\cos 2\theta \sin\theta$ 이다.

$2\sin\theta\cos\theta = 3\ 2\cos^2\theta - 1)\sin\theta$

$\sin\theta(6\cos^2\theta - 2\cos\theta - 3) = 0$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ 이므로 $\cos\theta = \dfrac{1+\ \ 19}{6}$ 이다.

16. [A형과 동일]

17. [A형과 동일]

18. [A형과 동일]

19. [출제의도] 도함수를 이용한 함수의 최댓값 구하기

[해설] $y = e^x$ 와 $y = k$ 의 교점은 $\mathrm{P}(\ln k,\ k)$이다.

따라서 $\mathrm{PQ} = -2\ln k$, $\overline{\mathrm{PR}} = k$ 이므로 구하고자 하는 직사각형의 넓이를 라 할 때, $S = -2k\ln k$이다.

$S' = -2(\ln k + 1)$이므로 S는 $k = \dfrac{1}{e}$ 에서 극대이고 최대이다. 따라서 S의 최댓값은 $\dfrac{2}{e}$ 이다.

(별해)

$\mathrm{Q}(x,\ e^{-x})$ 이라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}} = 2x$, $\mathrm{QS} = e^{-x}$ 이고 넓이는 $2xe^{-x}$ 이다.

20. [A형과 동일]

21. [출제의도] 분수부등식 이해하기

[해설]

$\dfrac{f^{-1}(x)\,|\ -|f(x)|}{f(x)} \ge 0$에서

(ⅰ) $x > 0$ 일 때

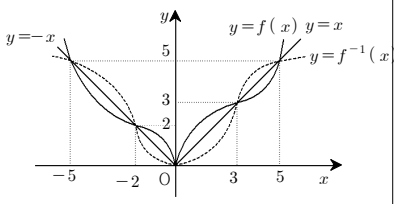
$f(x) > 0$ 이고, $|f^{-1}(x)| \ge |f(x)|$이다.

이를 만족하는 정수 x는 3, 4, 5 이다.

(ⅱ) $x < 0$ 일 때

$f(x) < 0$ 이고, $|f^{-1}(x)| \le |f(x)|$이다. 이를 만족하는 정수 x는 -2, -1 이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 정수 x는 5 개이다.



22. [출제의도] 그래프를 나타내는 행렬 이해하기

[해설] (행렬의 모든 성분의 합)

$=$(모든 변의 개수)$\times 2 = 7 \times 2 = 14$

23. [출제의도] 치환을 이용한 무리방정식의 해 구하기

[해설] $\sqrt{2x+1} - 2 = t$ 로 치환하면

$t^2 + 9 = 6t$ 를 만족하는 t 의 값은 $t = 3$ 이다.

$\sqrt{2x+1} - 2 = 3$

따라서 $x = 12$ 이다.

24. [출제의도] 행렬을 이용한 문제 해결하기

[해설]

주어진 식으로부터 행렬 $\begin{pmatrix} 2k+2 & a-5 \\ k & 3-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이다.

$x = 0$, $y = 0$ 이외의 해를 갖도록 하기 위해서는

$(2k+2)(3-b) - (a-5)k = 0$ 이다.

모든 실수 k 에 대하여

$(-a-2b+11)k + (-2b+6) = 0$ 이므로

$a = 5$, $b = 3$ 이다. 따라서 $a + b = 8$ 이다.

25. [출제의도] 등비수열 이해하기

[해설] 주어진 조건에 의해서 $a + 3b$ 는 등비중항이다.

$(a+3b)^2 = a \times (a+5b)$

$a = -9b\ (b \ne 0)$ $\cdots$㉠

주어진 조건에 의해서

$3a + 8b = 57$ $\cdots\cdots$㉡

이다. ㉠, ㉡에 의해 $a = 27$, $b = -3$ 이다.

$\therefore\ a + b = 24$

26. [A형과 동일]

27. [출제의도] 도함수를 이용하여 접선의 방정식 구하기

[해설]

$l : y = 3(x-1) + 7$, $m : y = \dfrac{1}{3}(x-7) + 1$

두 직선 l, m 의 교점은 $\mathrm{P}(-2,\ -2)$ 이다.

삼각형 PBA 는 선분 AB 를 밑변으로 하고, 선분 AB 의 중점$(4,\ 4)$ 와 점 $\mathrm{P}(-2,\ -2)$ 사이의 거리를 높이로 하는 이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 PBA 의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 36$ 이다.

(참고)

$f(x) = x^3 + a$ 인 경우 삼각형의 넓이는 a^2 이다.

28. [출제의도] 삼각함수 합성을 이용하여 삼각방정식의 해 구하기

[해설] 주어진 식을 정리하면

$2\cos\dfrac{3x}{2}\ \cos\dfrac{x}{2} = \cos\dfrac{3x}{2}$

$\cos\dfrac{3x}{2}\ 2\cos\dfrac{x}{2} - 1) = 0$

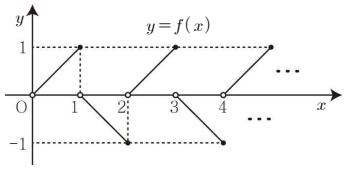
$\cos\dfrac{3x}{2} = 0$ 또는 $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{3}$, π, $\dfrac{5\pi}{3}$또는 $x = \dfrac{2\pi}{3}$이다.

따라서 모든 근의 합은 $\dfrac{11}{3}\pi$ 이므로 $a + b = 14$ 이다.

29. [출제의도] 수열의 규칙성 이해하기

[해설] $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



직선 l_n 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와의 교점을 구해보면 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 2$, $a_6 = 3$, $a_7 = 3$, $\cdots$, $a_{18} = 9$, $a_{19} = 9$, $a_{20} = 10$ 이므로 구하는 값은

$\sum_{n=1}^{20} a_n = 0 + 2(1+2+3+\cdots+8+9) + 10 = 100$ 이다.

30. [A형과 동일]