• 2교시 수리 영역 •

[가 형]

1	③	**2**	③	**3**	①	**4**	⑤	**5**	③
6	⑤	**7**	⑤	**8**	④	**9**	④	**10**	①
11	④	**12**	①	**13**	③	**14**	⑤	**15**	③
16	②	**17**	②	**18**	②	**19**	④	**20**	②
21	①	**22**	6	**23**	20	**24**	60	**25**	121
26	485	**27**	4	**28**	144	**29**	82	**30**	48

1. [출제의도] 지수법칙을 이해하고 계산하기

[해설]

$$\sqrt[5]{8}\times 4^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^3}\times\left(2^2\right)^{-\frac{4}{5}} = 2^{\frac{3}{5}}\times 2^{-\frac{8}{5}} = \frac{1}{2}$$

2. [출제의도] 로그의 성질을 이해하고 계산하기

[해설] $\log_3 12+2\log_3\frac{3}{2}=\log_3 12+\log_3\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$$=\log_3\left(12\times\frac{9}{4}\right)=\log_3 3^3=3$$

3. [출제의도] 수열의 극한값 구하기

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-5^{n+1}}{5^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-5}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}=-5$$

4. [출제의도] 역행렬 구하기

[해설] $(A-2E)^2=O$를 전개하면

$A^2-4A+4E=O$이므로

$A(A-4E)=-4E,\ A\left(-\frac{1}{4}A+E\right)=E$

그러므로 $A^{-1}=-\frac{1}{4}A+E$

$p=-\frac{1}{4},\ q=1 \qquad \therefore p+q=\frac{3}{4}$

5. [출제의도] 거듭제곱근의 성질 이해하기

[해설] $\frac{\sqrt[n]{2^{18}}}{\sqrt[n]{3^{24}}}=\sqrt[n]{\frac{2^{18}}{3^{24}}}=\sqrt[n]{\frac{(2^3)^6}{(3^4)^6}}=\sqrt[n]{\left(\frac{8}{81}\right)^6}$ 의 값이 유리수가 되려면 n이 6의 약수인 1, 2, 3, 6이어야 한다. 그러므로 n은 2, 3, 6 ($\because n\geq 2$)

[별해] $\sqrt[n]{2^{18}}=2^{\frac{18}{n}}$, $\sqrt[n]{3^{24}}=3^{\frac{24}{n}}$ 이므로 n은 18과 24의 공약수이고, $n\geq 2$이므로, $n=2,\ 3,\ 6$이다.

6. [출제의도] 순열을 이용하여 함수의 개수 구하기

[해설] Y의 모든 원소의 곱이 36^2이므로 조건을 만족하는 경우는 $1\times 4\times 9=2\times 3\times 6$이다. 따라서 (1, 4, 9), (2, 3, 6)에 각각 대응되는 경우의 수는 3!이므로 $3!\times 3!$이고 서로 바뀌는 경우가 $2!$이므로 $3!\times 3!\times 2!=72$이다.

7. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 일반항 구하기

[해설] $f(1)=2,$

$f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=2^2,$

$f(3)=f(1+2)=f(1)f(2)=2^3,$

$\cdots$

$f(n)=2^n$

$$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}f(k)=1+\frac{2(2^9-1)}{2-1}=1023$$

8. [출제의도] 지수함수의 최솟값 구하기

[해설] $t=2^{x-2}+2^{-x}$라 하면

$t=2^{x-2}+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^{x-2}2^{-x}}=1$이고,

$2^x+2^{2-x}=4\left(2^{x-2}+2^{-x}\right)=4t$이므로

$f(t)=t^2-4t+8=(t-2)^2+4$ (단, $t\geq 1$)

그러므로 최솟값은 4이다.

9. [출제의도] 행렬의 성질을 이해하기

[해설] ㄱ. [반례] $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $A^2=2E$이므로

$A^2B=(2E)B=B(2E)=BA^2$ (참)

ㄷ. $(A-E)(A^3+A^2+A+E)=O$이므로

$A^4-E=O,\ A^2A^2=E$이므로

$(A^2)^{-1}=A^2$이다. (참)

10. [출제의도] 상용로그를 이용하여 실생활문제 해결하기

[해설] 매월 전월보다 10%씩 증가하므로 12개월 후 이용자 수는 $10(1+0.1)^{12}$(만 명)이다.

$x=10(1+0.1)^{12}$라 하면

$\log x=\log 10(1.1)^{12}=\log 10+12\log 1.1$

$=1+0.48=1+\log 3.02=\log 30.2$

$\therefore x=30.2$(만 명)

그러므로 302000(명)이다.

11. [출제의도] 행렬에 대응되는 입체 추론하기

[해설] $a_{11}=m_1\times m_1=4$이므로 $m_1=2.$

$a_{22}=m_2\times m_2=9$이므로 $m_2=3.$

$a_{33}=m_3\times m_3=16$이므로 $m_3=4.$

12. [출제의도] 무한수열의 성질 이해하기

[해설] ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$이면

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$이다. (참)

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: 1, -1, 1, -1, $\cdots$

$\{b_n\}$: 1, 1, 1, 1, $\cdots$ (거짓)

ㄷ. [반례] $a_n=1+\frac{1}{n}$ (거짓)

13. [출제의도] 극한값 구하기

[해설] 계산하는 식을 수열의 귀납적 정의로 표현하면

$A_1=25,\ \ A_{n+1}=\frac{2}{3}A_n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이고 $A_{n+1}-9=\frac{2}{3}(A_n-9)$

그러므로 일반항은 $A_n=16\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+9$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}A_n=9$

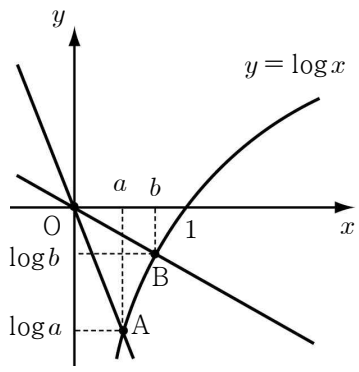
14. [출제의도] 역행렬이 존재하는 조건 구하기

[해설] 역행렬이 존재하기 위하여 $pr-sq\neq 0$이어야 한다. 대각의 합이 180°인 사각형은 원에 내접하고 $p:s=q:r$이 성립하므로 $pr-sq=0$이 되어 역행렬이 존재하지 않는다.

15. [출제의도] 로그함수 그래프의 성질 이해하기

[해설] ㄱ. $0<a<b<1$이므로 $0<\log_a b<1$(참)

ㄴ. 세 점 O(0, 0), A(a, $\log a$), B(b, $\log b$)에 대하여 직선 OA의 기울기 $\frac{\log a}{a}$가 직선 OB의 기울기 $\frac{\log b}{b}$보다 작으므로 성립한다. (참)



ㄷ. $\log_a\left(\frac{a}{b}\right)=1-\log_a b,\ \log_b\left(\frac{b}{a}\right)=1-\log_b a$이고, $0<\log_a b<1,\ \log_b a>1$이므로,

$\log_a\left(\frac{a}{b}\right)>\log_b\left(\frac{b}{a}\right)$이다. (거짓)

16. [출제의도] 행렬을 이용한 실생활문제 해결하기

[해설] 자동차의 속력을 x, $y\ (x>y)$라 할 때,

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y=10\pi,\ \frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y=10\pi$이므로

$\begin{pmatrix}1&1\\5&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\pi\\30\pi\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\pi\begin{pmatrix}5&1\\5&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore a=1,\ b=-1$ 이므로 $|a-b|=2$

17. [출제의도] 이항정리를 이용한 식의 값 추론하기

[해설] $(1+x)^{59}={}_{59}C_0+{}_{59}C_1x+\cdots+{}_{59}C_{59}x^{59}$

이고, 양변에 x대신 i를 대입하면,

$(1+i)^{59}$

$=\left({}_{59}C_0-{}_{59}C_2+{}_{59}C_4-\cdots-{}_{59}C_{58}\right)$

$+\left({}_{59}C_1-{}_{59}C_3+{}_{59}C_5-\cdots-{}_{59}C_{59}\right)i$

$=\sum_{r=0}^{29}(-1)^r{}_{59}C_{2r}+\sum_{r=0}^{29}(-1)^r{}_{59}C_{2r+1}\,i$

한편, $(1+i)^{59}=\{(1+i)^2\}^{29}\times(1+i)$

$=(2i)^{29}(1+i)=-2^{29}+2^{29}i$

$\therefore$(가) $\sum_{r=0}^{29}(-1)^r{}_{59}C_{2r+1}$, (나) -2^{29}

18. [출제의도] 수학적귀납법으로 대소관계 추론하기

[해설] (가) $k+1$, (나) $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, (다) $\frac{2k+3}{2}$

19. [출제의도] 무한등비급수의 규칙성 추론하기

[해설] 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이와 넓이는 각각 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로, 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 높이는 $\sqrt{3}$이고 넓이는 $\sqrt{3}$이다.

삼각형 A_1의 높이는 내접원의 지름과 같으므로 내접원의 반지름을 r라 하면,

$\frac{1}{2}(2+2+2)r=\sqrt{3}$이므로 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고

내접원의 지름은 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$이다.

삼각형의 한 변의 높이가 $\frac{2}{3}$배만큼 축소되므로 넓이는 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$배만큼 축소된다.

삼각형 A_1의 한 변의 길이는 $\frac{4}{3}$이므로

$S_1=\frac{4}{9}\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{4}{9}$인 무한등비급수이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{4}{9}\sqrt{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{4}{5}\sqrt{3}$$

20. [출제의도] 로그부등식 문제해결하기

[해설] 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$가 성립하려면

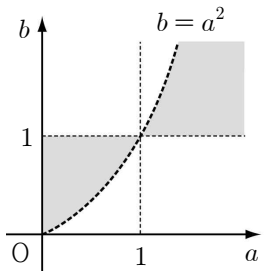
$\log_a b > 0,\ D = (\log_a b)^2 - 2\log_a b < 0$

$\therefore\ 0 < \log_a b < 2$

i) $0 < a < 1$인 경우 $\therefore\ a^2 < b < 1$

ii) $a > 1$인 경우 $\therefore\ 1 < b < a^2$

이므로 구하고자 하는 영역은



21. [출제의도] 로그의 성질 이용하여 문제해결하기

[해설] 로그의 정의를 이용하면 $\log_2 x^n = 4$를 만족하는 x는 $x^n = 2^4$의 정수해이므로,

$A_1 = \{16\},\ A_2 = \{-4, 4\},\ A_4 = \{-2, 2\}$

이다.

$n\log_2 x = 4$를 만족하는 x는 $x = 2^{\frac{4}{n}}$의 정수해이므로, $B_1 = \{16\},\ B_2 = \{4\},\ B_4 = \{2\}$이다.

$\therefore\ (A_1 \cup A_2 \cup A_4) - (B_1 \cup B_2 \cup B_4)$

$= \{-4,\ -2\}$

그러므로 모든 원소의 합은 -6이다.

22. [출제의도] 순열의 정의 이해하기

[해설] $(n+1)n(n-1) = n(n-1)(n-2) + 90$

$3n(n-1) = 90 \quad \therefore n = 6$

23. [출제의도] 등차중항과 등비중항 이해하기

[해설] $b^2 = 3a,\ 6a = 12 + 2b$

$2b^2 - 2b - 12 = 0,$

$b^2 - b - 6 = (b-3)(b+2) = 0$

$\begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = -2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$

$a,\ b$는 서로 다른 수이므로 $a = \frac{4}{3},\ b = -2$

$\therefore\ 9a^2 + b^2 = 20$

24. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수 구하기

[해설] $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r\, x^r x^{r-6} = {}_6\mathrm{C}_r\, x^{2r-6}$이다. $2r - 6 = \pm 1$이 되는 정수 r은 존재하지 않는다. $(x^2 + 3x + 3)$의 일차항과 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$의 상수항의 곱이 x의 일차항이 된다.

$2r - 6 = 0,\ r = 3$이므로 상수항은 ${}_6\mathrm{C}_3$이다.

그러므로 $(x^2 + 3x + 3)\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$의 x의 계수는

$3 \times {}_6\mathrm{C}_3 = 60$이다.

25. [출제의도] 행렬의 거듭제곱 구하기

[해설] $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$A^2 = 3A,\ A^3 = 3^2 A,\ A^4 = 3^3 A,\ A^5 = 3^4 A$

$A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = 121A$

그러므로 $k = 121$

26. [출제의도] 수열의 규칙성 찾아 문제해결하기

[해설] 각 행의 마지막 숫자들만 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하면 $\{a_n\}$은 1, 4, 10, 22, 46, $\cdots$이다.

$\{a_n\}$의 계차수열이 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore\ a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$

그러므로 2008에 가장 가까운 마지막 항을 구하면 $n = 10$일 때, 1534이다. 그러므로 2008은 다음 행의 1535부터 474번째에 위치한다.

$\therefore\ m = 11,\ n = 474$

$\therefore\ m + n = 485$

27. [출제의도] 무한급수의 수렴조건 이해하기

[해설] 무한급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{3n} - \frac{3n+2}{2n-1}\right) = 0$이고

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n} = \frac{3}{2}$이다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{6a_n + 21n - 7}{2a_n + 3n + 5}$

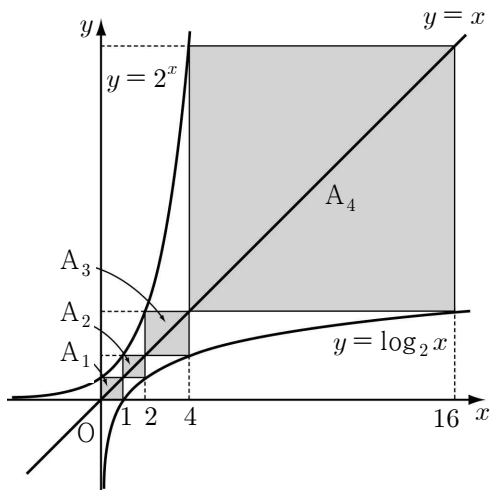
$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6a_n}{3n} + \frac{21n-7}{3n}}{\frac{2a_n}{3n} + \frac{3n+5}{3n}} = 4$

28. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프 이해하기

[해설] 그림과 같이 두 함수 $y = 2^x,\ y = \log_2 x$는 좌표축과 각각 $(0,\ 1),\ (1,\ 0)$에서 만나므로 정사각형 A_1의 한 변의 길이는 1이다.

또, $x = 1$을 지수함수에 대입하면 정사각형 A_2의 한 변의 길이는 1이고, $x = 2$를 지수함수에 대입하면 정사각형 A_3의 한 변의 길이는 2이고, $x = 4$를 지수함수에 대입하면 정사각형 A_4의 한 변의 길이는 12이다.

그러므로 A_4의 넓이는 144이다.



29. [출제의도] 조합의 수를 구하여 문제해결하기

[해설] 1) 3명, 5명씩 2개 조로 나누는 방법의 수

i) 3명인 조에 여학생 2명이 포함된 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_5 = 6$

ii) 5명인 조에 여학생 2명이 포함된 경우의 수는 남학생을 3명, 3명으로 나눈 후 여학생 2명을 2개 조에 각각 배정하는 경우의 수 이므로

${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 20$

2) 4명, 4명씩 2개 조로 나누는 방법의 수는

${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_4 = 15$

1), 2)에 의해서 구한 2개 조를 2개의 청소구역에 배정하는 경우의 수는 $(6 + 20 + 15) \times 2! = 82$가지이다.

그러므로 m은 82이다.

30. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수에 대한 문제해결하기

[해설] 상용로그 $\log A$의 지표 n과 가수 α가 방정식 $4x^2 - 13x + \beta = 0$의 두 근이므로

$\log A = n + \alpha = \frac{13}{4}$이다.

n은 정수, $0 \leqq \alpha < 1$이므로, $n = 3,\ \alpha = \frac{1}{4}$이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{30}\left[\frac{400\alpha}{n^k}\right] = \sum_{k=1}^{30}\left[\frac{100}{3^k}\right]$

$= \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \left[\frac{100}{3^4}\right] + 0 + \cdots$

$= 48$